DISTRIBUCIONES BINOMIAL, DE POISSON Y NORMAL

BNP I

Distribución binomial

a. Se enunciará acá de nuevo el problema ya considerado en NP X 11:
Dado un suceso *A* cuya probabilidad de ocurrencia en una prueba aislada es *p*, se quiere hallar la probabilidad de que en *n* pruebas independientes *A* ocurra exactamente *i* veces.
Según deducido al resolver dicho problema:

$$P(i \text{ ocurrencias de } A \text{ en } n \text{ pruebas independientes}) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \textbf{[1]}$$

Supóngase ahora que a la cantidad de ocurrencias de *A* en las *n* pruebas se le asocie la variable aleatoria X.
Entonces, por **[1]** se tendrá que:

$$P(\mathrm{X} = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \textbf{[2]}$$

Evidentemente:

$$\sum_{i=0}^{n} P(\mathrm{X} = i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \underset{\text{Por fórmula del desarrollo binomial}}{=} \left[p + (1-p)\right]^n = 1$$

tal como era de anticipar.

b. Interesa ahora calcular el valor medio y la varianza de la variable aleatoria X.
Se echará mano del siguiente artificio:
Sean X_1, X_2, …, X_n variables aleatorias correspondiente respectivamente a las pruebas 1ª, 2ª, …, *n*ª.
Se define que:

$$\left.\begin{array}{l} P\,(X_j = 0) \text{ si en la prueba j NO ocurre el suceso } A \\ P\,(X_j = 1) \text{ si en la prueba j SI ocurre el suceso } A \end{array}\right] \ \forall\ j$$

Evidentemente

$$P\,(X_j = 0) = 1 - p \qquad , \qquad P\,(X_j = 1) = p \qquad \textbf{[3]}$$

y entonces será:

$$\left.\begin{array}{r} m_{X_j} = 0.(1-p) + 1.p = p \\ \sigma^2_{X_j} = (0-p)^2 (1-p) + (1-p)^2\, p = p.(1-p) \end{array}\right] \ \forall\ j \qquad \textbf{[4]}$$

c. Ahora bien, como evidentemente se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} 1^o)\ X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ son independientes entre sí} \\ 2^o)\ X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \end{array}\right\} \quad \textbf{[5]}$$

entonces, por lo visto en **[1]** y **[2]** de VAM IX se tiene que:

$$m_X = m_{X_1} + m_{X_2} + \ldots + m_{X_n} = n.p \quad \textbf{[6]}$$

$$\sigma^2_X = \sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + \ldots + \sigma^2_{X_n} = n.p(1-p) \quad \textbf{[7]}$$

$$\sigma_X = \sqrt{n.p(1-p)} \quad \textbf{[8]}$$

BNP II

<u>Aplicación de la distribución binomial a un proceso de inspección por atributos</u>

a. Sea un lote grande de objetos similares. Supóngase que un objeto cualquiera puede ser declarado "bueno" o "malo" en base a una prueba conclusiva (una lámpara prende o no prende, una pieza pasa o no pasa por un calibre fijo, etc.).
Supóngase ahora tener en el lote una proporción *p* de objetos malos, por el momento desconocida.
Supóngase que entre fabricante y consumidor se llegue a un acuerdo acerca de una proporción máxima de malos, p_t, que sería tolerable en un lote, conveniéndose que si es $p \leq p_t$ el lote será aceptado, y que si es $p > p_t$ el lote será rechazado.
Evidentemente, esto significa que para aceptar o rechazar el lote se hace necesario hallar el valor exacto de *p*, lo que implica ensayar todos los elementos del lote. Esto puede resultar en ciertos casos antieconómico, y en otros descabellado (por ejemplo en el caso de pruebas destructivas, como ser de fósforos).
Con lo que resulta que el antedicho acuerdo entre fabricante y consumidor puede no ser adecuado desde un punto de vista técnico. Entonces, supóngase que como acuerdo alternativo se acepte el juicio del siguiente mecanismo de aceptación – rechazo:

<u>Del lote (grande) se saca una muestra de *n* ejemplares, y si en dicha muestra hay c o menos ejemplares malos el lote será aceptado. En caso contrario, será rechazado</u>.

En lo que sigue se analizarán las implicaciones de este mecanismo. Supóngase que los *n* ejemplares de la muestra sean extraídos uno a uno y probados. A estos *n* elementos se les irán asociando variables aleatorias, $X_1, \ldots X_n$, tales que:

$X_j = 0$ si el elemento j resulta bueno

$X_j = 1$ si el elemento j resulta malo.

Si p es la proporción (desconocida) de elementos malos de la muestra, se establece que un "reflejo fiel" de la realidad es:

$$\left.\begin{array}{r} P(\mathrm{X_j} = 0) = 1 - p \\ P(\mathrm{X_j} = 1) = p \\ P(\mathrm{X_j} = \mathrm{x}) = 0 \quad para \;\; \mathrm{x} \neq 0 \;\; ; \;\; 1 \end{array}\right\} \forall \;\; \mathrm{j} \qquad \textbf{[1]}$$

En rigor, **[1]** será una copia fiel de la realidad sólo cuando el lote sea infinito, ya que en el caso de un lote finito la proporción de elementos malos que quedan en el lote va cambiando de extracción en extracción, y por lo tanto asignar $P(\mathrm{X_j} = 1) = p$, $\forall \;\; j$ no es rigurosamente correcto. Pero por otra parte en el caso de lotes muy grandes, y cuando la cantidad de elementos de la muestra es mucho menor que la cantidad de elementos del lote, se tiene que la antedicha proporción queda "prácticamente" inalterada de extracción en extracción, y por lo tanto **[1]** es una "copia suficientemente fiel" de la realidad.
Por estos motivos puede establecerse que:

$\mathrm{X_1}, \ldots, \mathrm{X_n}$ son independientes **[2]**

Entonces, si se pone:

$$\mathrm{X} = \mathrm{X_1} + \ldots + \mathrm{X_n}$$

por lo visto en BNP I resulta de **[1]** y **[2]** que:

$$P(\mathrm{X} = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \;\; \text{para} \;\; i = 0, 1, \ldots, n$$

$$P(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = 0 \qquad\qquad \text{para } x \neq 0, 1, \ldots, n$$

y entonces:

$$P(\mathrm{X} \leq c) = \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{para} \quad c = 0, \; 1, \; \ldots, \; n \qquad \textbf{[3]}$$

Esta probabilidad $P(\mathrm{X} \leq c)$ es la probabilidad de tener c o menos elementos malos en la muestra extraída, y por lo tanto constituye la probabilidad de aceptación del lote.
La fórmula **[3]** se encuentra tabulada en el nomograma de la figura BNP II a (publicado por la Western Electric en IEEE Spectrum, Diciembre de 1966) el cual es suficientemente exacto para las aplicaciones comunes. En caso de desearse mayor precisión, consultar a:

ROMIG – 50 – 100 Binomial Tables – Ed Wiley

Nomograma para el cálculo de:

$$P(X \le c) = \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

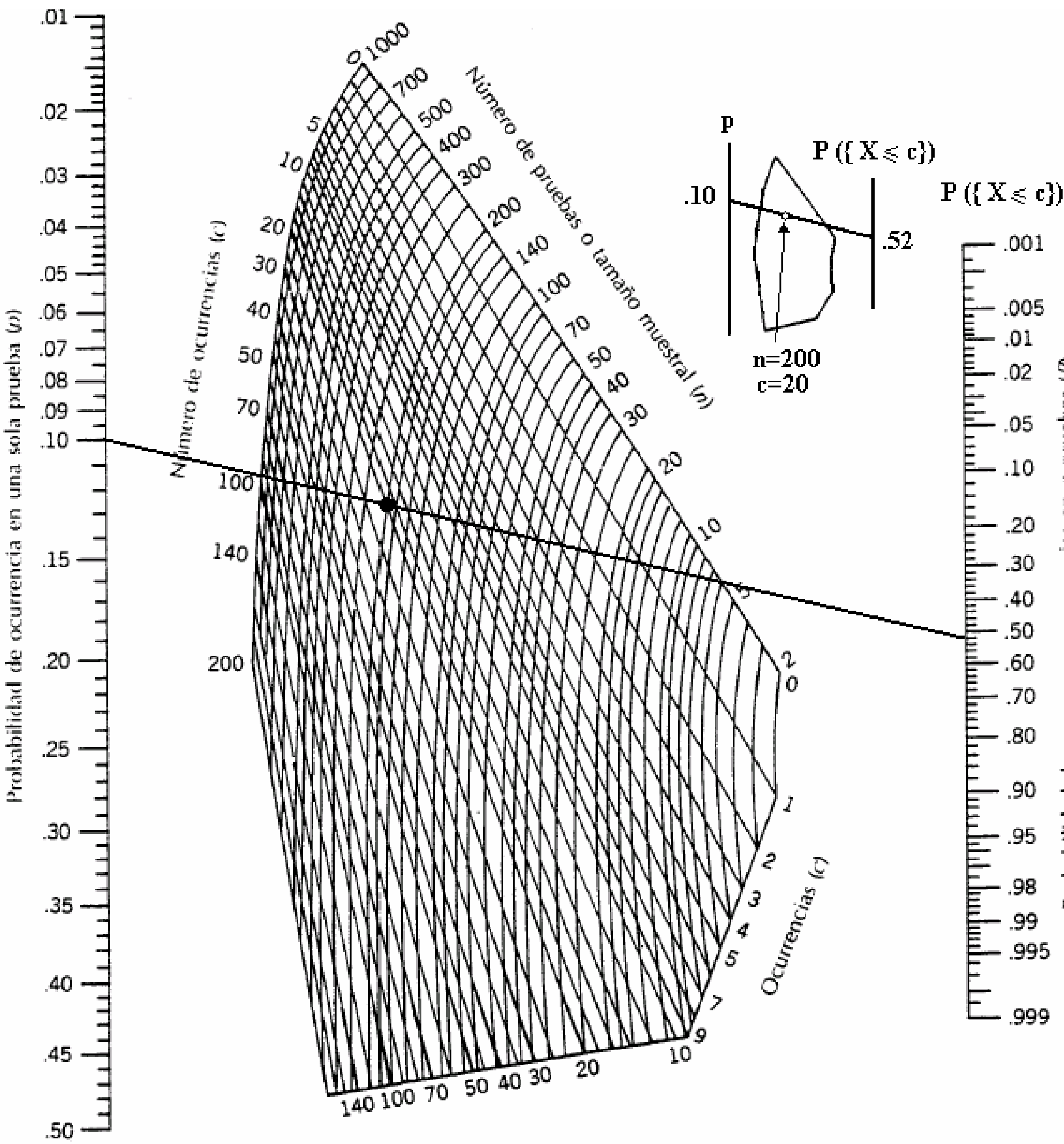

Figura BNP II.a

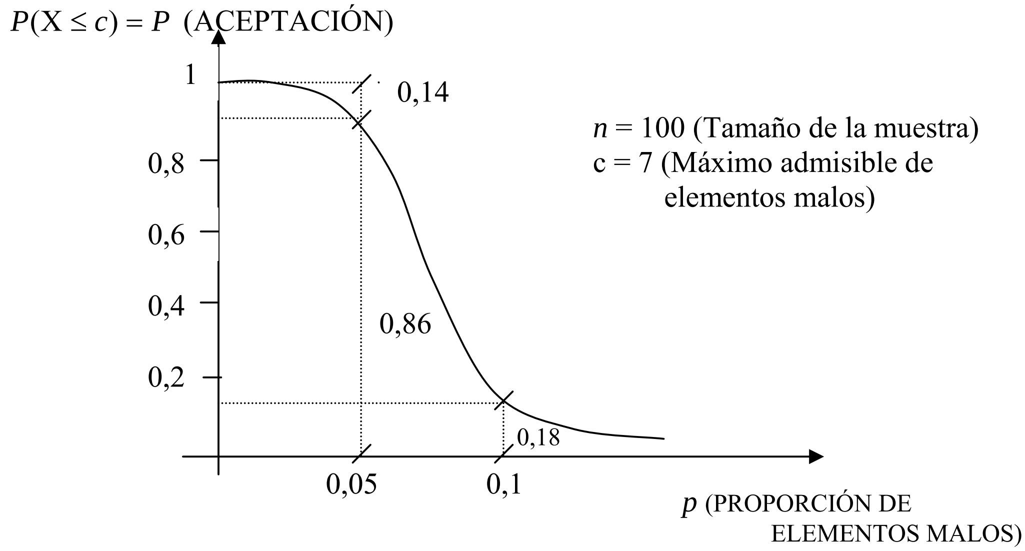

Figura BNP II.b

Supóngase que en **[3]** se mantengan fijos n (tamaño de la muestra) y c (máximo admisible de elementos malos). Resultará entonces que $P(X \leq c)$ (probabilidad de aceptación) será únicamente función de p (proporción de malos). Así, en la figura BNP II.b, y mediante el uso del nomograma de la figura BNP II.a, se ha trazado la curva $P(X \leq c)$ vs p para $n = 100$ y c = 7. A este tipo de curva se la llamará <u>diagrama de operación</u> del proceso de inspección.
En el diagrama de operación de la figura BNP II.b puede observarse lo siguiente:

1º) A menos de ser perfecto ($p = 0$), cualquier lote, por bueno que sea, tiene una cierta probabilidad de ser rechazado. Así, un lote con $p = 0{,}05$ tiene una probabilidad de 0,86 de ser aceptado y, por lo tanto, una probabilidad de 0,14 de ser rechazado.

2º) A la recíproca, cualquier lote, por malo que sea, tiene una cierta probabilidad de ser aceptado. Así, un lote con $p = 0{,}1$ tiene una probabilidad de 0,18 de ser aceptado.

b. Supóngase que entre fabricante y consumidor se convenga lo siguiente:

1º) Un valor p_b (por ejemplo 0,02) tal que el lote sea considerado "decididamente bueno" (DB en lo sucesivo) cuando sea $p < p_b$.

2º) Un valor p_m (por ejemplo 0,05) tal que el lote sea considerado "decididamente malo" (DM en lo sucesivo)cuando sea $p < p_m$.

3º) Una probabilidad máxima de rechazo de un lote DB, r_f, a la que se llamará riesgo del fabricante (por ejemplo: $r_f = 0{,}05$).

4º) Una probabilidad máxima de aceptación de un lote DM, r_c, a la que se llamará riesgo del consumidor (por ejemplo: $r_c = 0{,}10$).

Se tratará de diseñar un experimento (es decir elegir un n y c) que tenga un diagrama de operación que cumpla con lo recién indicado.
Para hacerlo, sobre el nomograma de la figura BNP II.c (que es el mismo que la figura BNP II.a) trácese una primera recta que una el valor de p_b (0,02) sobre la escala de p con el valor de $1 - r_f$ ($1 - 0{,}05 = 0{,}95$) sobre la escala de $P(X \leq c)$, y trácese una segunda recta que una el valor de p_m (0,05) sobre la escala de p con el valor de r_c (0,10) sobre la escala de $P(X \leq c)$.

Nomograma para el cálculo de:

$$P(X \le c) = \sum_{i=0}^{c} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

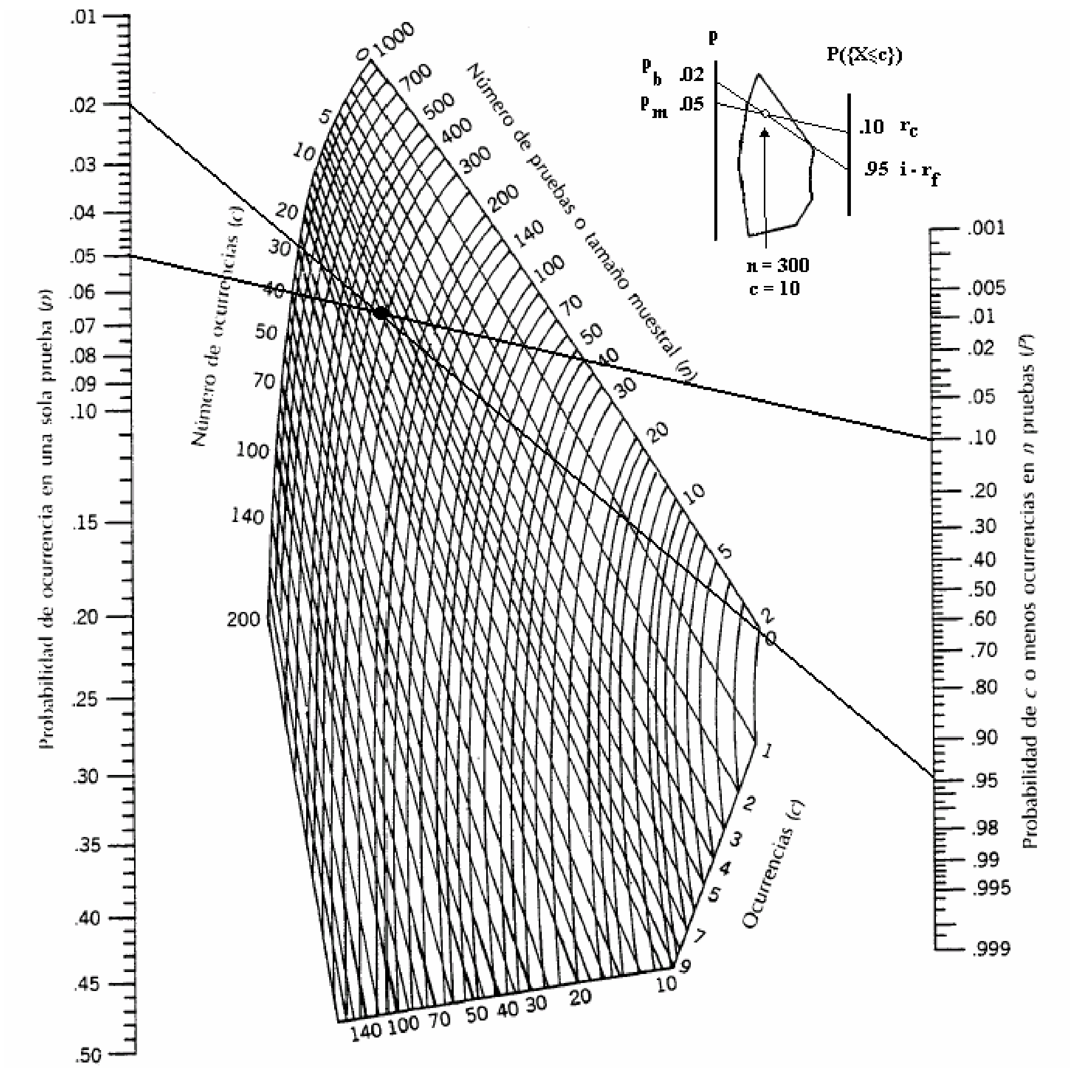

Figura BNP II.c

En el punto en que se cortan ambas rectas, léanse los valores de n y c correspondientes (n = 300 y c = 10), resultando evidente que, por construcción, dichos valores determinan un experimento que cumple con los requerimientos arriba indicados.
El diagrama de operación correspondiente es el indicado en la figura BNP II.d.

Observaciones:

1º) No hay ninguna garantía de que las dos rectas trazadas sobre el nomograma se corten justo sobre la intersección de una curva n y una curva c, lo que implicaría que se deben tomar valores de n y/o c que no son enteros. Como esto es imposible, lo que se debe hacer es reajustar ligeramente uno de los datos (p_b , p_m , r_f o r_c) para salvar este inconveniente.

2º) El experimento será tanto más elaborado (n más grande) cuanto menores se tomen r_f y r_c y cuanto más próximos entre sí estén p_b y p_m, es decir cuanto más seguro y selectivo sea.

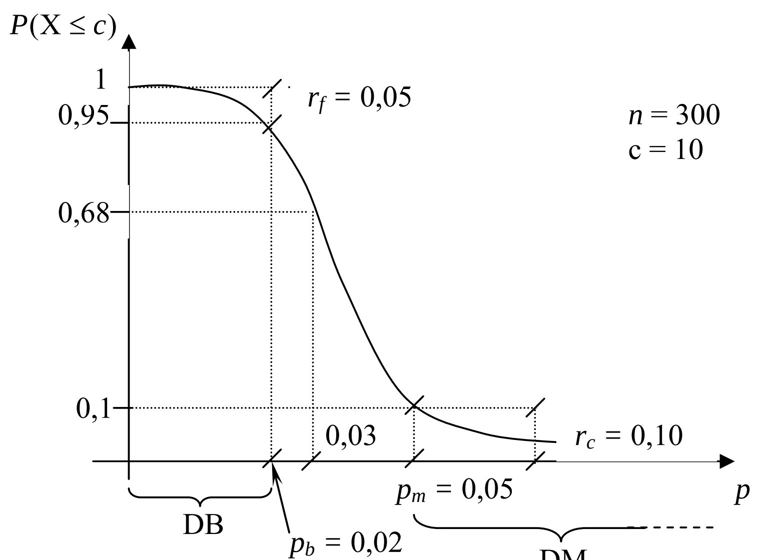

Figura BNP II.d

BNP III

Distribución de Poisson

a. Sea el mismo caso indicado en BNP I. Allí se halló que:

$$P(\mathrm{X} = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{[1]}$$

Esta fórmula puede ser puesta bajo la forma:

$$P(\mathrm{X} = i) = \frac{1}{i!}\frac{n(n-1)\ldots[n-i+1]}{n^i}(np)^i\left(1-\frac{np}{n}\right)^n (1-p)^{-i} =$$

$$= \frac{1}{i!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\right](np)^i \left[\left(1-\frac{np}{n}\right)^{-\frac{n}{np}}\right]^{-np} (1-p)^{-i} \qquad \textbf{[2]}$$

Supóngase ahora que:

1º) n sea muy grande
2º) $i << n$
3º) $np = \lambda << n$ (lo que implica que $p \cong 0$)

Entonces, como en estas condiciones se tiene que:

$$1º)\ \left(1-\frac{1}{n}\right) \cong 1 \ , \ \ldots, \ \left(1-\frac{i-1}{n}\right) \cong 1$$

$$2º)\ (1-p)^{-i} \cong 1$$

$$3º)\ \left[\left(1-\frac{np}{n}\right)^{-\frac{n}{np}}\right]^{-np} \cong e^{-\lambda}$$

de **[2]** resulta que:

$$P(\mathrm{X}=i) \cong \frac{\lambda^{i}}{i\ !} e^{-\lambda} \qquad \textbf{[3]}$$

Resumiendo:

$$P(X=i) = \frac{\lambda^{i}}{i\ !} e^{-\lambda} \quad \text{cuando} \left[\begin{array}{c} n \to \infty \\ p \to 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} np = \lambda, valor\ \ finito \end{array} \right. \qquad \textbf{[4]}$$

b. Como se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i\ !} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i\ !} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

se verifica que **[4]** es la f. de p. de una distribución discreta a la que se llamará distribución de Poisson.
Sea una variable X a la cual se asocia una distribución de Poisson.
Entonces:

$$m_X = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i\,!} e^{-\lambda} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \qquad \textbf{[5]}$$

Además:

$$\lambda^2 = m_X^2 \quad \text{por } \textbf{[5]}$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i\,!} e^{-\lambda} - m_X^2 = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i}{i\,!} - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \left[i(i-1) + i \right] \frac{\lambda^i}{i\,!} - \lambda^2 = e^{-\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1) \frac{\lambda^i}{i\,!} + \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i}{i\,!} \right] - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \left[\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \right] - \lambda^2 = e^{-\lambda} \left[\lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i\,!} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i\,!} \right] - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \left[\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right] - \lambda^2 = \lambda \qquad \textbf{[6]}$$

Entonces, por **[5]** y **[6]**:

$$m_X = \sigma_X^2 = \lambda \qquad \textbf{[7]}$$

c. Según visto en **a**, la distribución de Poisson es una buena aproximación de la binomial cuando la cantidad *n* de variables elementales es muy grande, teniendo cada una de ellas una probabilidad *p* muy baja de asumir el valor 1, y teniéndose además que $\lambda = n\,p$ resulte un valor "razonable".
El único dato necesario para que la distribución esté completamente determinada es el valor de λ, el cual es igual al valor medio y a la varianza de la variable.

d. Puede demostrarse (ver apéndice A.BNP I del presente capítulo) que si $X_1, \ldots, X_n$ son <u>independientes</u> y tienen distribuciones de Poisson cuyos parámetros son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente, entonces la variable:

$$Z = X_1 + \ldots + X_n$$

Tendrá una distribución de Poisson con parámetro $(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$.

BNP IV

<u>Aplicaciones de la distribución de Poisson</u>

a. En la Argentina, como promedio mueren 2 vacas mensualmente electrocutadas por rayos. Indicar la probabilidad de que en un mes determinado mueran 4 vacas (suponer que no hay influencia estacional o geográfica en la posible cantidad de accidentes).
En este caso, la cantidad *n* de variables elementales es muy grande (una variable por cada vaca), y en un modelo que sea "reflejo fiel" de la realidad, la probabilidad $P(X_j = 1) = p$ es muy baja.
Como además es:

$$\lambda = n\,p = 2$$

se está dentro de las condiciones que garantizan una buena aproximación por la distribución de Poisson.
Entonces:

$$P(\mathrm{X}=4) \cong \frac{e^{-2}2^4}{4!} = 0{,}09$$

b. (Extraída del libro de B. Gnedenko: "Teoría de las probabilidades").
La probabilidad de dar en el blanco con un único tiro de un rifle es de 0,001. Indicar la probabilidad de dar 2 o más veces en el blanco cuando se tiran 5000 tiros simultáneamente.
En el presente caso:

$$n = 5000 \qquad\qquad \lambda = n\,p = 5000\,.\,0{,}001 = 5$$

valores tales que implican obtener una buena aproximación usando la distribución de Poisson. Entonces:

$$P(\mathrm{X}=i) \approx \frac{5^i e^{-5}}{5!}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} &P(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - P(\mathrm{X}=0 \cup \mathrm{X}=1) = 1 - \left[P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1)\right] = \\ &= 1 - P(\mathrm{X}=0) - P(\mathrm{X}=1) \approx \\ &\approx 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} - \frac{5^1 e^{-5}}{1!} = 1 - 6e^{-5} = 0{,}9595 \end{aligned}$$

BNP V

<u>Distribución normal</u>

a. Se verificará que:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\mathrm{x}-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad \textbf{[1]}$$

es la expresión de una F. de D.
(Considerar <u>por el momento</u> que m es un número cualquiera, y que σ es un número positivo cualquiera, ambos sin ningún significado en particular).

b. Para empezar como el integrando es uniformemente positivo para todo t se tiene que:

$\mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(\mathrm{x})$ <u>es una función continua y monótona creciente</u> **[2]**

c. Continuando, es evidente que:

$$\lim_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(\mathrm{x}) = 0 \qquad \textbf{[3]}$$

d. Entonces, para la verificación de que $\mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(x)$ es en efecto una F. de D. Falta únicamente probar que:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(\infty) = \lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(\mathrm{x}) = 1 \qquad \textbf{[4]}$$

Esta demostración es relativamente laboriosa. Ha sido relegada al apéndice A.BNP II del presente capítulo.

e. La f. de d. correspondiente a la F. de D. $\mathrm{F}_{\mathrm{N}(m;\sigma)}(\mathrm{x})$ es:

$$f_{N(m;\sigma)}(x) = \frac{d}{dx} F_{N(m;\sigma)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[F_{N(m;\sigma)}(x+\Delta x) - F_{N(m;\sigma)}(x)\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-m}{\sigma}}^{\frac{x+\Delta x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x-m}{\sigma}}^{\frac{x-m}{\sigma}+\frac{\Delta x}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\xi)^2} \; ; \; \lim_{\Delta x \to 0} \xi = \frac{x-m}{\sigma}$$

Por lo tanto:

$$f_{N(m;\sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \qquad \textbf{[5]}$$

f. Por **[5]** se tiene que:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{N(m;\sigma)}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = m \qquad \textbf{[6]}$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\, f_{N(m;\sigma)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma^2 \qquad \textbf{[7]}$$

es decir que toda variable aleatoria a la que se asigne una F. de D. $F_{N(m;\sigma)}(x)$ tendrá un valor medio igual a *m* y una varianza igual a σ^2, es decir una desviación típica igual a σ. De ahí los indicativos (mnemotécnicos) *m* y σ que figuran en los “nombres” de la F. de D. $F_{N(m;\sigma)}(x)$ y de la f. de d. $f_{N(m;\sigma)}(x)$.

g. En lo sucesivo se llamará <u>normal (*m*,*σ*)</u> a: **[8]**

- La F. de D. $F_{N(m;\sigma)}(x)$ y la f. de d. $f_{N(m;\sigma)}(x)$
- Todas las variables a las cuales se asocie la F. de D. $F_{N(m;\sigma)}(x)$
- La distribución de probabilidad a la cual corresponde la F. de D. $F_{N(m;\sigma)}(x)$

h. Entre las distribuciones normales, la más “popular” es la normal (0,1) ya que es la única cuyas F. de D. y f. de d. están tabuladas, y ya que todas las $F_{N(m;\sigma)}(x)$ y $f_{N(m;\sigma)}(x)$, ∀ (*m*,σ) pueden ser deducidas de la tabulación antedicha.
Evidentemente: (ver **[1]** y **[5]**):

$$F_{N(0;1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \quad ; \quad f_{N(0;1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \textbf{[9]}$$

y comparando estas fórmulas con las **[1]** y **[5]** resulta:

$$F_{N(m;\sigma)}(x) = F_{N(0;1)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \quad ; \quad f_{N(m;\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} f_{N(0;1)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad \textbf{[10]}$$

Estas fórmulas son importantísimas ya que permiten hallar el valor de $F_{N(m;\sigma)}(x)$ y de $f_{N(m;\sigma)}(x)$ en base a la tabulación de $F_{N(0;1)}(x)$ y de $f_{N(0;1)}(x)$

i. Se tiene que**:**

$$X \ normal\ (m,\sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \Leftrightarrow P\left(\frac{X - m}{\sigma} \le \frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(Y \le y) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \Rightarrow Y \ normal\ (0,1) \Rightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma}\right) normal(0,1)$$

$$\uparrow$$

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}, \quad y = \frac{x - m}{\sigma}$$

Resumiendo:

$$X \ normal\ (m;\sigma) \Leftrightarrow \left(\frac{X-m}{\sigma}\right) normal(0;1) \qquad \textbf{[11]}$$

j.

$$1 - F_{N(0;1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = F_{N(0;1)}(-x)$$

Haciendo el cambio de variable *t* = -*τ*

Resumiendo:

$$F_{N(0;1)}(-x) = 1 - F_{N(0;1)}(x) \qquad \textbf{[12]}$$

k. Supóngase que X sea una variable aleatoria normal (m;σ). Sea una nueva variable:

$$Y = -X$$

Entonces:

Por ser X continua

$$P(Y \le x) = P(-X \le x) = P(X \ge -x) = 1 - P(X < -x) = 1 - F_{N(m;\sigma)}(-x) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{=1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{-x-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{F_{N(m,\sigma)}(-x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x-m}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

Haciendo el cambio de variable *t* = -*τ*

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x+m}{\sigma}}^{-\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x+m}{\sigma}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-(-m)}{\sigma}} e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau = F_{N(-m;\sigma)}(x) \quad \textbf{[13]}$$

Es decir que si X es una variable aleatoria normal (*m*,σ), entonces (-X) es una variable aleatoria normal (-*m*,σ).

BNP VI

<u>Suma de variables aleatorias normales</u>

Sean X e Y variables independientes y normales, respectivamente $(m_X;\sigma_X)$ y $(m_Y;\sigma_Y)$
Se puede probar (con mucho trabajo) que:

$$(X+Y) \text{ es normal } [(m_X + m_Y) \ ; \ (\sqrt{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}))]$$

Esto puede ser generalizado fácilmente al caso de *n* variables. Así, si X_1, ..., X_n son variables independientes y normales, respectivamente $(m_{X_1};\sigma_{X_1}), \ldots\ldots, (m_{X_n};\sigma_{X_n})$ se tiene que:

$$(X_1+\ldots+X_n) \text{ es normal } [(m_{X_1} + \ldots.. + m_{X_n}) \ ; \ (\sqrt{(\sigma_{X_1}^2 + \ldots.. + \sigma_{X_n}^2}))]$$

BNP VII

<u>Teorema central del límite</u>

BNP VII.1

<u>Versión de Lindeberg</u>

a. Sea X_1, X_2, ..., X_n un conjunto de variables aleatorias independientes. Supóngase que todas ellas tengan una misma F. de D. <u>cualquiera</u> (que puede ser discreta, continua, etc.), tal que las variables tengan valor medio y varianza finitas. Evidentemente todas estas variables tendrán un mismo valor medio y una misma varianza:

$$m_{X_1} = m_{X_2} = \ldots = m_{X_n} = m \qquad \textbf{[1]}$$

$$\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = \ldots = \sigma_{X_n}^2 = \sigma^2 \qquad \textbf{[2]}$$

Sea la variable:

$$Y_n = \frac{X_1 - m}{\sigma\sqrt{n}} + \ldots + \frac{X_n - m}{\sigma\sqrt{n}} \qquad \textbf{[3]}$$

Si se llama $F^{Y_n}(x)$ a la F. de D. de Y_n, el teorema de Lindeberg expresa:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F^{Y_n}(x) = \text{F. de D. normal (0,1), uniformemente en todo intervalo cerrado.}}$$

La demostración de este teorema está más allá del alcance de este libro. Puede encontrársela en: H. Cramer, “Métodos Matemáticos de la Estadística”, Capítulo XVII, párrafo 17-4.

b. Póngase:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \qquad \textbf{[4]}$$

Según **[3]** es:

Por **[4]**

$$\sigma\sqrt{n}Y_n = (X_1 + \ldots + X_n) - nm \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Y_n = \overline{X} - m \Rightarrow \overline{X} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Y_n + m$$

y entonces:

$$P(\overline{X} \le x) = P(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Y_n + m \le x) = P\left(Y_n \le \frac{x-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Como, según visto en **a**, se tiene que para n muy grande la F. de D. de Y_n es aproximadamente normal (0,1), resulta que:

Ver **[10]** de BNP V

$$P(\overline{X} \le x) \approx F_{N(0;1)}\left(\frac{x-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = F_{N(m;\sigma/\sqrt{n})}(x) \qquad \text{para } n \text{ grande}$$

y por lo tanto:

Para n grande, la variable aleatoria $\overline{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ es aproximadamente normal (m ; $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), siendo m y σ el valor medio y la desviación típica de todas las variables $X_1, \ldots, X_n$. **[5]**

BNP VII.2

<u>**Versión de Liapunoff**</u>

a. En esta versión del teorema central del límite se amplían notablemente las condiciones de validez.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes. <u>Cada una de ellas tiene su F. de D. propia, su valor medio propio y su varianza propia</u>.

Sea la variable:

$$Y_n = \frac{(X_1 - m_{X_1}) + \ldots.. + (X_n - m_{X_n})}{\sqrt{(\sigma^2_{X_1} + \ldots.. + \sigma^2_{X_n})}} \qquad \textbf{[6]}$$

a cuya F. de D. se la llamará $F^{Y_n}(x)$.

El teorema de Liapunoff expresa (en forma muy intuitiva):

$\lim_{n\to\infty} F^{Y_n}(x) =$ F. de D. normal (0,1) uniformemente en todo intervalo cerrado cuando al tender $n \to \infty$ tiende a cero la contribución de cada una de las variables a un eventual resultado no nulo. En otras palabras, existirá el límite cuando no haya ninguna variable o conjunto finito de variables que condicionen sensiblemente el resultado del experimento. **[7]**

Puede encontrarse una demostración rigurosa del teorema de Liapunoff en: J. V. Uspensky, "Matemáticas de las Probabilidades", página 311, y en B. Gnedenko, "Teoría de las Probabilidades", Capítulo 8.

b. Por **[6]** se tiene que:

$$P(X_1 + ... + X_n \leq x) = P([\sqrt{(\sigma^2_{X_1} + ... + \sigma^2_{X_n})}.Y_n + (m_{X_1} + ... + m_{X_n})] \leq x) =$$

$$= P(Y_n \leq \frac{x - (m_{X_1} + ... + m_{X_n})}{\sqrt{(\sigma^2_{X_1} + ... + \sigma^2_{X_n})}}) \approx F_{N(0;1)}(\frac{x - (m_{X_1} + ... + m_{X_n})}{\sqrt{(\sigma^2_{X_1} + ... + \sigma^2_{X_n})}}) =$$

$$= F_{N(0;1)}(\frac{x - (m_{X_1 + ...+ X_n})}{\sigma_{X_1 + ...+ X_n}})$$

Para n grande, $X_1, \ldots, X_n$ independientes y ninguna de ellas preponderante.

Resumiendo, para n grande, $X_1, \ldots, X_n$ independientes y ninguna de ellas preponderante es:

$$P(X_1 + \ldots + X_n \leq x) \approx F_{N(0;1)}(\frac{x - (m_{X_1 + ...+ X_n})}{\sigma_{X_1 + ...+ X_n}})$$

En la mayoría de los casos que se presentan en la práctica, por medios experimentales puede hallarse una estimación mas o menos aproximada de $m_{X_1 + ...+ X_n}$ y de $\sigma_{X_1 + ...+ X_n}$.

BNP VII.3

Las F. de D. normales son sin duda las F. de D. más "populares" del cálculo de probabilidades.
Los motivos de este hecho surgen del teorema central del límite. Para empezar, en todo problema en que haya que sumar una gran cantidad de variables con una misma F. de D. se tiene que la F. de D. de la variable suma podrá ser aproximada por una F. de D. normal (ver BNP VII.1).
Además, muy a menudo en fenómenos físicos aparece "espontáneamente" la F. de D. normal. Esto se debe a que la variable que es "copia fiel" del fenómeno físico puede ser considerada como la suma de una gran cantidad de variables elementales independientes, entre las cuales no hay ninguna que sea "preponderante". Se entra entonces dentro de las condiciones del teorema de Liapunoff (ver BNP VII.2) y éste indica que la variable resultante tiende a ser normal. Ejemplos de este tipo de casos serían los siguientes:

1º) La variable aleatoria correspondiente al suministro de energía de una usina a las 18 hs., la cual es la suma de las variables aleatorias que corresponden a los consumos individuales de una gran cantidad de usuarios.

2º) La variable aleatoria correspondiente al total de indemnizaciones que paga una compañía de seguros en un año, la cual es la suma de las variables correspondientes a lo pagado a cada uno de los asegurados.

Etc.

BNP VIII

Consideraciones adicionales sobre las F. de D. normales

a. La F. de D. normal (0;1) está graficada y tabulada en la figura BNP VIII.b, y la f. de d. normal (0;1) lo está en la figura BNP VIII.c.
Notar que en la tabla de $f_{N(0;1)}(x)$ sólo figuran valores positivos de x. Esto es debido a que como:

$$f_{N(0;1)}(x) = f_{N(0;1)}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \textbf{[1]}$$

resulta superfluo tabular $f_{N(0;1)}(x)$ para valores negativos de x. Así, para hallar $f_{N(0;1)}(-3)$ se busca en la tabla $f_{N(0;1)}(3)$, valor igual al de $f_{N(0;1)}(-3)$.

b. Tabulada la F. de D. normal (0,1) queda tabulada por implicación cualquier F. de D. normal. Así, por ejemplo:

$$F_{N(1;2)}(3) = F_{N(0;1)}\left(\frac{3-1}{2}\right) = F_{N(0;1)}(1) = 0{,}84134$$

Por **[10]** de BNP V

$$F_{N(1;2)}(-5) = F_{N(0;1)}\left(\frac{-5-1}{2}\right) = F_{N(0;1)}(-3) = 0{,}0013$$

c. Lo mismo ocurre para las f. de d. normales. Así:

$$f_{N(1;2)}(3) = \frac{1}{2} f_{N(0;1)}\left(\frac{3-1}{2}\right) = \frac{1}{2} f_{N(0;1)}(1) = \frac{0{,}24197}{2} = 0{,}120985$$

Por **[10]** de BNP V

$$f_{N(1;2)}(-5) = \frac{1}{2} f_{N(0;1)}\left(\frac{-5-1}{2}\right) = \frac{1}{2} f_{N(0;1)}(-3) = \frac{0{,}0443}{2} = 0{,}002215$$

d. A título ilustrativo se muestran en la figura BNP VIII.a los gráficos de algunas f. de d. normales.

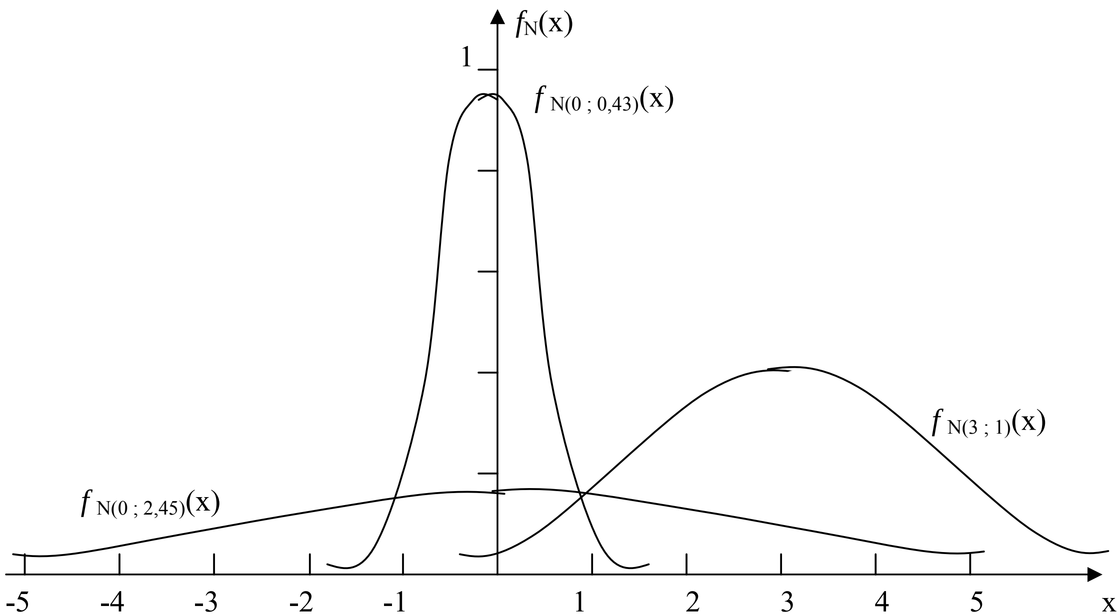

Fig. BNP VIII.a

Tabla de la función:

$$F_{N(0;1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0019	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0078	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1404	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0..3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0..9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Fig. BNP VIII.b

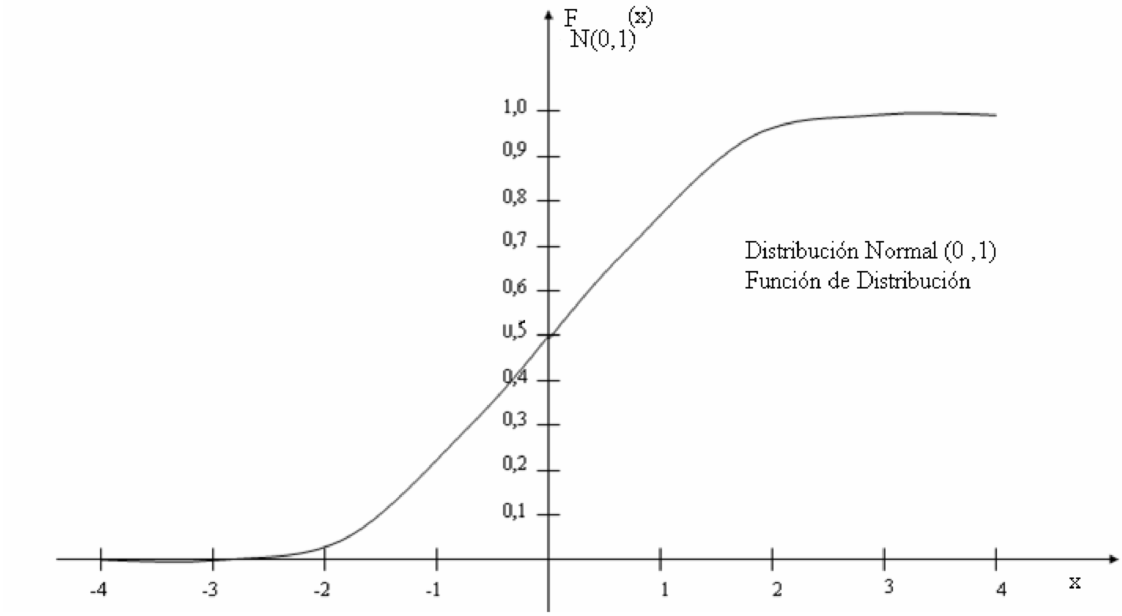

Fig. BNP VIII.b (continuación)

x	$f_{N(0,1)}(x)$
0,0	0,39894
0,1	0,39695
0,2	0,39104
0,3	0,38139
0,4	0,36827
0,5	0,35207
0,6	0,33322
0,7	0,31225
0,8	0,28969
0,9	0,26609
1,0	0,24197
1,1	0,21795
1,2	0,19419
1,3	0,17137
1,4	0,14973
1,5	0,12952
1,6	0,11092
1,7	0,09405
1,8	0,07895
1,9	0,06562
2,0	0,05399
2,1	0,04398
2,2	0,03547
2,3	0,02833
2,4	0,02239
2,5	0,01753
2,6	0,01358
2,7	0,01042
2,8	0,00792
2,9	0,00595
3,0	0,00443
3,1	0,00327
3,2	0,00238
3,3	0,00172
3,4	0,00123
3,5	0,00087
3,6	0,00061
3,7	0,00042
3,8	0,00029
3,9	0,00020
4,0	0,00013

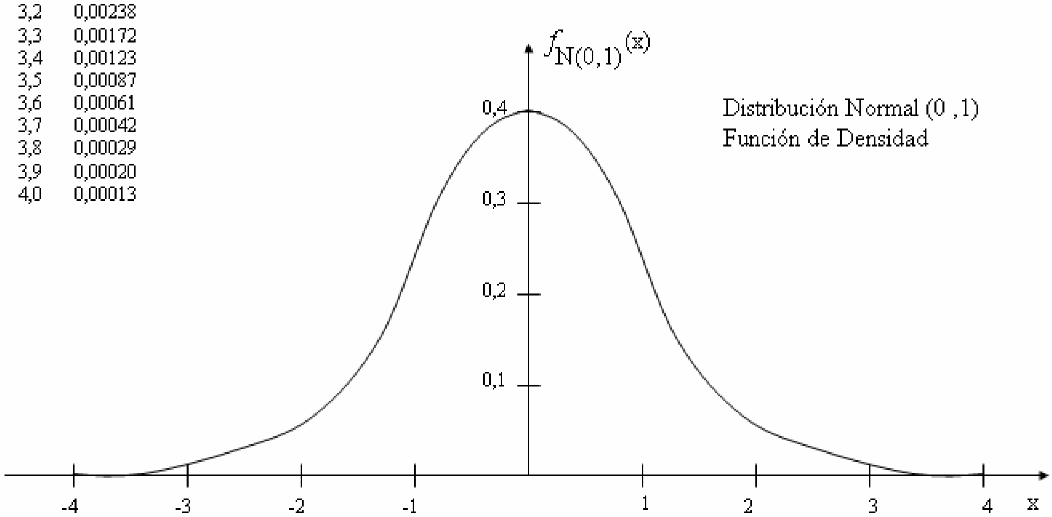

Fig. BNP VIII.c

BNP IX

Aplicaciones de las F. de D. normales

BNP IX.1

Semanalmente, en un puesto de cigarrillos se vende una media de 300 cartones de una cierta marca, con una desviación típica igual a 4. El mayorista visita el puesto todos los Lunes por la mañana. Indicar la cantidad de cartones que debe comprar el dueño del puesto al mayorista para tener una probabilidad del 0,95 de no quedarse sin cigarrillos de la marca en cuestión.

Sea Y la variable correspondiente a la venta en cartones de la marca antedicha. Dicha variable Y es la suma de todas las variables correspondientes a los consumos individuales de una gran cantidad de clientes. Resulta entonces que según el teorema de Liapunoff, la F. de D. de Y, $F^Y(y)$, ha de ser aproximadamente normal (300;4).
Sea y la cantidad de cartones a tener en stock los lunes a la mañana para tener una probabilidad igual a 0,95 de que no se acaben durante la próxima semana. Es decir, sea y tal que:

$$P(\mathrm{Y} \le \mathrm{y}) = 0{,}95$$

Suponiendo que Y sea normal (300;4):

$$P(\mathrm{Y} \le \mathrm{y}) \overset{\substack{\text{v. a. normal (300;4)}\\ \downarrow}}{=} \mathrm{F}_{\mathrm{N}(300;4)}(\mathrm{y}) \overset{\substack{\text{Ver }\textbf{[10]}\text{ de BNP V}\\ \downarrow}}{=} \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{\mathrm{y}-300}{4}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dato}}}{=} 0{,}95 \qquad \textbf{[1]}$$

De la tabla de la F. de D. normal (0;1) puede obtenerse el valor de $\frac{\mathrm{y}-300}{4}$ que satisface a **[1]**. Entrando en dicha tabla con $p = 0{,}95$ se obtiene que debe ser:

$$\frac{\mathrm{y}-300}{4} = 1{,}65 \Leftrightarrow \mathrm{y} = 4 \cdot 1{,}65 + 300 = 306{,}6 \approx 307$$

Por lo tanto:

Cartones a comprar = 307 – Remanente de la semana anterior (si existe).

Observación:
Notar que la parte del enunciado "Semanalmente se vende una media de 300 cartones con una desviación típica igual a 4" es bastante artificial. En efecto, los verdaderos valores de la media y la desviación son desconocidos y serán siempre desconocidos. Lo único que se puede hacer es estimar dichas magnitudes en base a un experimento cuya "materia prima" es llevar cuenta de la venta a lo largo de una cierta cantidad de semanas.
Notar al respecto que si por dos veces se lleva la cuenta a lo largo de *n* semanas, los resultados obtenidos serán casi seguramente distintos, y por lo tanto se obtendrán dos estimaciones distintas de la media y la desviación.
Puede demostrarse (pero no se pretenderá hacerlo) que cuanto mayor sea el período durante el cual se lleve la cuenta de la venta, mayor probabilidad se tendrá de tener una estimación precisa.
Resulta así que si el problema propuesto se llevara al plano práctico, habría dos fuentes de error:

1. La relativa "veracidad" del valor medio y desviación utilizados.
2. Como la cantidad de clientes es finita, la F. de D. normal será solo una aproximación de la verdadera F. de D.

Se hace constar que este estado de relativa incertidumbre es moneda corriente en la Estadística.

BNP IX.2

Una cierta fábrica tiene una producción de ejes cuyos diámetros siguen una distribución normal cuyo valor medio y varianza son 100,05 y 0,01 respectivamente. El comprador de dichos ejes los prueba a todos, uno por uno, mediante dos calibres de 99,9 y 100,1 mm respectivamente. Un eje es aceptable cuando no pasa por el primer calibre y sí lo hace por el segundo. Indicar la probabilidad de que un eje tomado al azar sea aceptado.
Si Y es la variable asociada al diámetro de los ejes, la probabilidad de que un eje tomado al azar sea aceptado es:

$$P(99{,}9 < \mathrm{Y} < 100{,}1) = \mathrm{F}^{\mathrm{Y}}(100{,}1) - \mathrm{F}^{\mathrm{Y}}(99{,}9)$$

Como, según los datos del problema, Y es una variable normal (100,05; $\sqrt{0{,}01}$):

$$P(99{,}9 < \mathrm{Y} < 100{,}1) =$$

Por **[10]** de BNP V

$$= \mathrm{F}_{\mathrm{N}(100{,}05\,;\,0{,}1)}(100{,}1) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(100{,}05\,;\,0{,}1)}(99{,}9) =$$

$$= \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{100{,}1-100{,}05}{0{,}1}\right) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{99{,}9-100{,}05}{0{,}1}\right) = \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(0{,}5) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(-1{,}5) =$$

$$= 0{,}6915 - 0{,}0668 = 0{,}6247$$

Esta probabilidad es la superficie del área sombreada de la figura BNP IX.2.a.

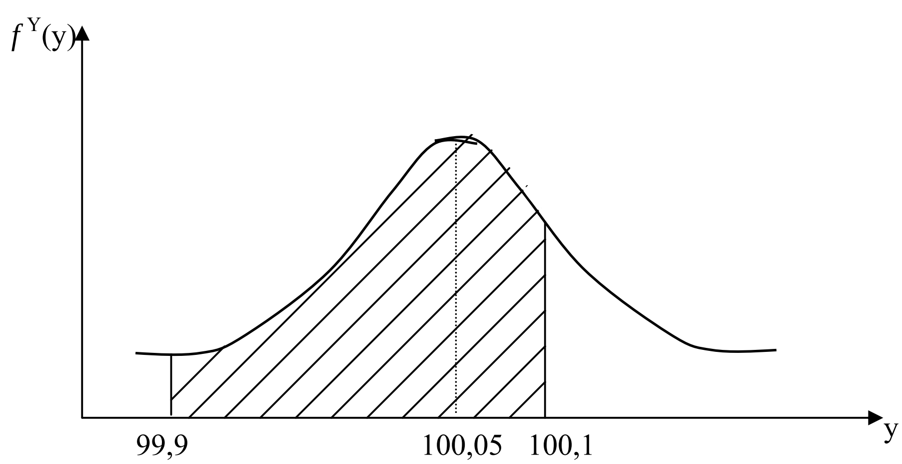

Fig. BNP IX.2.a

BNP IX.3

Una fábrica manufactura motores cuya potencia sigue la distribución normal. Suponiendo que el 10 % de los motores desarrolla 90 HP o menos y que el 5% desarrolla más de 110 HP, indicar el valor medio y la varianza de dicha distribución.
Sea Y la variable aleatoria correspondiente a la potencia. Esta variable es normal $(m_Y;\sigma_Y)$, siendo m_Y y σ_Y por el momento desconocidos.
Según los datos del problema:

$$1^{\circ})\ 0{,}1 = P(Y \le 90) = \underbrace{F_{N(m_Y;\sigma_Y)}}_{\text{v. a. normal } (m_Y;\sigma_Y)}(90) \overset{\text{Por [10] de BNP V}}{=} F_{N(0;1)}\left(\frac{90-m_Y}{\sigma_Y}\right) \qquad \textbf{[1]}$$

$$2^{\circ})\ 0{,}05 = P(Y > 110) \Leftrightarrow 0{,}95 = \underbrace{P(Y \le 110)}_{\text{v. a. normal } (m_Y;\sigma_Y)} = F_{N(m_Y;\sigma_Y)}(110) \underset{\text{Por [10] de BNP V}}{=} F_{N(0;1)}\left(\frac{110-m_Y}{\sigma_Y}\right) \qquad \textbf{[2]}$$

Según la tabla de la F. de D. normal (0;1), los valores de $\frac{90-m_Y}{\sigma_Y}$ y $\frac{110-m_Y}{\sigma_Y}$ que respectivamente satisfacen a **[1]** y **[2]** son:

$$\frac{90-m_Y}{\sigma_Y} = -1{,}28 \qquad ; \qquad \frac{110-m_Y}{\sigma_Y} = 1{,}65$$

De estas expresiones se deduce el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} m_Y - 1{,}28\ \sigma_Y = 90 \\ m_Y + 1{,}65\ \sigma_Y = 110 \end{cases}$$

del cual se obtiene:

$$\sigma_Y = 5{,}089 \qquad ; \qquad m_Y = 96{,}51$$

BNP IX.4

El diámetro de los granos de un cierto producto químico tiene una distribución normal (0,1 ; 0,025). Para uniformar el producto se desea eliminar el 10 % de diámetro mayor y el 5 % de diámetro menor mediante el uso de tamices. Indicar el tamaño de la malla de estos.

Sea Y la variable aleatoria correspondiente al diámetro de los granos. Evidentemente, Y será normal (0,1 ; 0,025).
Según los datos del problema, lo que debe buscarse son dos valores y_1 e y_2 tales que:

$$P(Y < y_1) = 0{,}05$$

$$P(Y > y_2) = 0{,}10 \Leftrightarrow P(Y \le y_2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Entonces:

v. a. normal (0,1 ; 0,025) ver **[10]** de BNP V

$$1^{o})\ 0{,}05 = P(Y < y_1) = F_{N(0{,}1\,;\,0{,}025)}(y_1) = F_{N(0;1)}\left(\frac{y_1 - 0{,}1}{0{,}025}\right) \qquad \textbf{[1]}$$

$$2^{o})\ 0{,}9 = P(Y \le y_2) = F_{N(0{,}1\,;\,0{,}025)}(y_2) = F_{N(0;1)}\left(\frac{y_2 - 0{,}1}{0{,}025}\right) \qquad \textbf{[2]}$$

v. a. normal (0,1 ; 0,025) ver **[10]** de BNP V

Según la tabla de la F. de D. normal (0;1), los valores de $\frac{y_1 - 0{,}1}{0{,}025}$ y $\frac{y_2 - 0{,}1}{0{,}025}$ que respectivamente satisfacen a **[1]** y **[2]** son:

$$\frac{y_1 - 0{,}1}{0{,}025} = -1{,}65 \qquad ; \qquad \frac{y_2 - 0{,}1}{0{,}025} = 1{,}28$$

De donde se deduce:

$y_1 = -\ 1{,}65\ .\ 0{,}025 + 0{,}1 = 0{,}05875$

$y_2 = 1{,}28\ .\ 0{,}025 + 0{,}1 = 0{,}132$

Con lo que resulta que la separación entre alambres ha de ser de 0,132 milímetros para el tamiz más grande y 0,05875 para el tamiz más chico.

BNP IX.5

La aplicación que sigue ha sido sacada de la obra de G. Gamow, “Jeux Mathematiques”.

En Alemania, después de la última guerra, el pan estaba racionado y toda persona tenía derecho a 200 gr. de pan por día. Los panaderos tenían moldes oficiales para obtener panes de 200 gr., resultando así que toda persona tenía derecho a uno de esos panes por día.

El profesor XX todos los días pasaba por la panadería a buscar su ración de pan. Un día le dijo al panadero que sus moldes no eran los oficiales ya que durante muchos días había pesado el pan que se le vendía en la balanza de su laboratorio, y había obtenido una media de 190 gr..

El panadero le respondió que era inevitable que hubiera algunas pequeñas diferencias de pan a pan, a lo que el profesor le contestó que si bien eso era cierto, el cúmulo de evidencia era totalmente condenatorio. A continuación procedió a explicar al panadero los misterios de la distribución normal, y a mostrarle los resultados de sus mediciones, los cuales eran tal como indicado en la figura BNP IX.5.a.

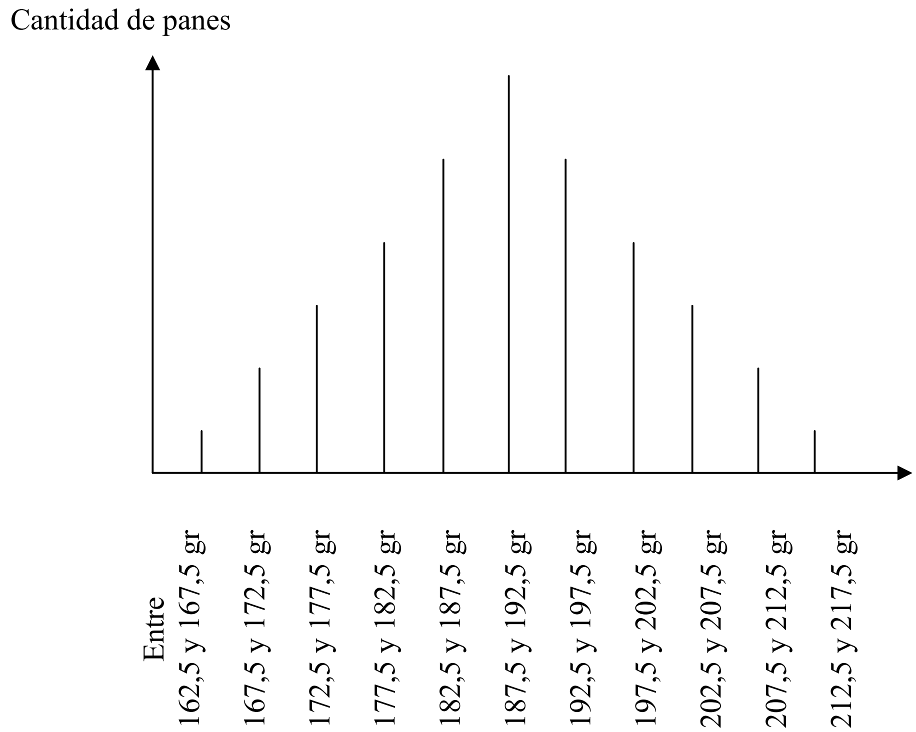

Fig. BNP IX.5.a

Al verse descubierto, el panadero reconoció su culpa y prometió enmendarse.
Transcurrido un cierto tiempo, el profesor denunció al panadero a la policía. El panadero fue llevado ante un tribunal y condenado a pagar una multa y a sufrir una breve sentencia en prisión.
En el curso del juicio, el abogado defensor del panadero preguntó al profesor si, desde que el panadero prometió enmendarse, había recibido algún pan de menos de 200grs. El profesor contestó que no, pero que era evidente que el panadero no había cambiado sus moldes, y que lo que hacía era reservar para él los panes más pesados de su producción normal.
Al preguntarle el abogado que cómo podía haber llegado a semejante conclusión, el profesor presentó los resultados de sus mediciones a partir del momento de la supuesta enmienda. Estas mediciones eran tal como indicado en la figura BNP IX.5.b y bastaron para condenar al panadero.

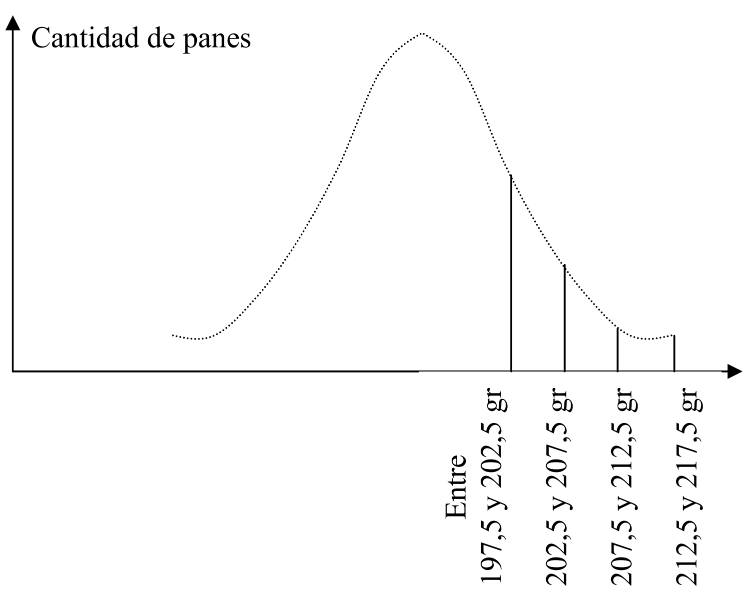

Fig. BNP IX.5.b

BNP IX.6

Una fábrica manufactura ejes cuyos diámetros siguen una distribución normal (0,50 ; 0,03), y otra manufactura cojinetes cuyos diámetros siguen una distribución normal (0,515 ; 0,04). Un cojinete se adapta a un eje si su diámetro excede al del eje entre 0,005 y 0,035. Indicar la probabilidad de que un eje y un cojinete elegidos al azar se adapten bien.
Sea *Z* la variable aleatoria normal (0,50 ; 0,03) asociada al diámetro de los ejes.
Sea *Y* la variable aleatoria normal (0,515 ; 0,04) asociada al diámetro de los cojinetes.
Evidentemente, la solución del problema consiste en hallar:

$$P(0{,}005 < \mathrm{Y} - \mathrm{Z} < 0{,}035) = P(0{,}005 < \mathrm{Y} + (-\mathrm{Z}) < 0{,}035)$$

Como:
1º) Y es normal (0,515 ; 0,04).
2º) Por ser Z normal (0,50 ; 0,03), se tiene (ver **[13]** de BNP V) que (- *Z*) es normal (-0,50 ; 0,03).
3º) Por lo indicado en BNP VI se tiene que:

$$\mathrm{Y} + (-\mathrm{Z}) \text{ es normal } \left(0{,}515 - 0{,}50; \sqrt{(0{,}04)^2 + (0{,}03)^2}\right), \text{ es decir normal } (0{,}015 ; 0{,}05)$$

y resulta que:

Ver **[10]** de BNP V

$$P(0{,}005 < \mathrm{Y} - \mathrm{Z} < 0{,}035) = \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0{,}015\,;\,0{,}05)}(0{,}035) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0{,}015\,;\,0{,}05)}(0{,}005) =$$

$$= \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{0{,}035 - 0{,}015}{0{,}05}\right) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{0{,}005 - 0{,}015}{0{,}05}\right) = \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(0{,}4) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(-0{,}2) =$$

$$= 0{,}6554 - 0{,}4207 = 0{,}2347$$

Es decir que se tiene una probabilidad de solo 0,2347 de que un cojinete y un eje tomados al azar se adapten, lo cual es muy pobre.

BNP X

Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal

a. Sea el mismo problema considerado en BNP I.
Tal como allí se vio:

1º. Las variables independientes $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ corresponden respectivamente a las pruebas 1ª, …, *n*ª.

2º. $P(\mathrm{X}_i = 0)$ si en la prueba *i* no ocurre el suceso A.

3º. $P(X_i = 1)$ si en la prueba *i* si ocurre el suceso A.

4º. $P(X_i = 0) = 1 - p$, $P(X_i = 1) = p$ **[1]**

5º. Para todos los X_i:

$$m = m_{\mathrm{X_i}} = p \;, \qquad \sigma = \sigma_{\mathrm{X_i}} = \sqrt{p(1-p)} \qquad \textbf{[2]}$$

Evidentemente:

$$\text{Ocurrencias de A en las } n \text{ pruebas} = \mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_n \qquad \textbf{[3]}$$

b. Supóngase que interesa conocer la probabilidad:

$P(a \leq$ Ocurrencias de A en las n pruebas $\leq b) = P(a \leq X_1 + \ldots + X_n \leq b)$ **[4]**

Se tiene que:

$$P(a \leq X_1 + \ldots + X_n \leq b) = P(a - np \leq (X_1 + \ldots + X_n) - np \leq b - np) =$$

$$= P\left(\frac{a - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \leq \underbrace{\frac{(X_1 + \ldots + X_n) - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}}_{Y_n} \leq \frac{b - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \right) \qquad \textbf{[5]}$$

y como por **[2]** es:

$$Y_n = \frac{(X_1 + \ldots + X_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{(X_1 - m)}{\sigma\sqrt{n}} + \ldots + \frac{X_n - m}{\sigma\sqrt{n}}$$

resulta por el teorema de Lindeberg que la variable Y_n tiende a la normal (0 ; 1) cuando n tiende a infinito.
Entonces, por **[5]**:

$$\left.\begin{aligned} P(a \leq X_1 + \ldots + X_n \leq b) &= P\left(\frac{a - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \leq \overbrace{Y_n}^{\approx N(0\,;\,1)} \leq \frac{b - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \right) \approx \\ &\approx F_{N(0;1)}\left(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) - F_{N(0;1)}\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) \quad \text{para } n \text{ grande} \end{aligned}\right\} \textbf{[6]}$$

c. Ejemplo.
Se pide calcular la probabilidad de que al tirar 10000veces una moneda se obtengan entre 4800 y 5100 caras.
En este caso el suceso A consiste en sacar cara. Evidentemente:

$$p = P(A) = \frac{1}{2}$$

Evidentemente, los 10000 tiros de moneda son otras tantas pruebas independientes.
Sea X la variable aleatoria correspondiente a la cantidad de caras obtenidas en los 10000 tiros.
Se tiene que en este caso:

$$n = 10000$$

y como este número de pruebas es muy grande, puede usarse una aproximación normal para la F. de D. de X.
Entonces por **[6]** se tiene que:

$$P(4800<\mathrm{X}<5100) \approx \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{5100-10000\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{10000}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}}\right)-\mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{4800-10000\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{10000}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}}\right)=$$

$$=\mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(2)-\mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(-4)=0{,}97725-0{,}00003=0{,}97722$$

d. Ejemplo

Un distribuidor de semillas sabe que el 5% de las semillas que vende no germinan. Vende paquetes de 200 semillas garantizando un 90% de germinación.

Se pide indicar que probabilidad existe de que el distribuidor cumpla con la garantía en un paquete de semillas tomado al azar.

En este caso se considerará que el suceso *A* consiste en que una semilla del paquete no germine. Por lo tanto:

$$p = P(A) = 0{,}05$$

Evidentemente, como la germinación o no germinación de una semilla no depende de la germinación o no germinación de las restantes, se tiene que al probar las 200 semillas de un paquete se efectúan 200 pruebas independientes.

En este caso

$$n = 200$$

Como este número de pruebas es grande (aunque no tanto), puede usarse una aproximación normal para la F. de D. de X, variable aleatoria correspondiente a la cantidad de semillas que no germinan.

Entonces, por **[6]** se tiene que:

P(cumplir con la garantía) = *P*(90% o más de las 200 semillas germinen) =

$$= P(\text{no germinen a lo sumo 20 semillas}) = P(\mathrm{X}<20) \cong \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{20-np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}\right)=$$

$$=\mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{20-200\cdot 0{,}05}{\sqrt{200}\sqrt{0{,}05(1-0{,}05)}}\right)=\mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(3{,}25)=0{,}99941$$

Este mismo problema puede ser resuelto mediante el nomograma de la figura BNP II.a. Allí, para:

$n = 200$ c = 20 $p = 0{,}05$

se obtiene:

$$P(\mathrm{X} \leq 20) = 0{,}9975$$

Esto da una idea de la precisión obtenida mediante el uso de la aproximación normal de la distribución binomial. Se hace constar que puede demostrarse que la precisión aumenta en la región $p \cong 0{,}5$ y disminuye cuando p es muy chico (como en el caso analizado), o muy grande.

e. Supóngase ahora que interese calcular mediante una aproximación de la normal a la binomial la probabilidad de que la variable aleatoria X, correspondiente a la cantidad de ocurrencias, asuma un valor fijo definido, es decir interesa hallar:

$$P(\mathrm{X} = \mathrm{c})$$

Por ejemplo, supóngase que en el caso **d** interese calcular la probabilidad de que no germinen exactamente 10 semillas.
Se echa mano del siguiente artificio:

$$P(\mathrm{X}=10) \approx P(10 - 0{,}5 < \mathrm{X} \leq 10 + 0{,}5) =$$

$$= \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{10{,}5 - 200 \cdot 0{,}05}{\sqrt{200}\sqrt{0{,}05(1 - 0{,}05)}}\right) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{9{,}5 - 200 \cdot 0{,}05}{\sqrt{200}\sqrt{0{,}05(1 - 0{,}05)}}\right) =$$

$$= \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{0{,}5}{3{,}08}\right) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}\left(\frac{-0{,}5}{3{,}08}\right) = \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(0{,}16) - \mathrm{F}_{\mathrm{N}(0;1)}(-0{,}16) =$$

$$= 0{,}5636 - 0{,}4364 = 0{,}1272$$

A título de verificación se calculará directamente dicha probabilidad mediante la fórmula binomial:

$$P(\mathrm{X} = 10) = \binom{200}{10}(0{,}05)^{10}(1 - 0{,}05)^{200-10} = 0{,}1284$$

APÉNDICES

A.BNP I

a. Sean X e Y variables aleatorias <u>independientes</u> que tienen distribuciones de Poisson cuyos parámetros son λ y η respectivamente.
Sea la variable:

$$Z = X + Y$$

Se tiene entonces que:

$$P(Z=n)=P(X=0\cap Y=n)+P(X=1\cap Y=n-1)+P(X=2\cap Y=n-2)+\ldots+P(X=n\cap Y=0)=$$

$$= P(X=0)P(Y=n)+P(X=1)P(Y=n-1)+P(X=2)P(Y=n-2)+\ldots+P(X=n)P(Y=0)=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}\frac{e^{-\eta}\eta^{n}}{n!}+\frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!}\frac{e^{-\eta}\eta^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}\frac{e^{-\eta}\eta^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots+\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\frac{e^{-\eta}\eta^{0}}{0!}=$$

$$= e^{-(\lambda+\eta)}\left[\frac{\eta^{n}}{n!}+\frac{\lambda\eta^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{\lambda^{2}\eta^{n-2}}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{\lambda^{n}}{n!(n-n)!}\right]=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{n!}\left[\eta^{n}+\frac{n!}{1!(n-1)!}\eta^{n-1}\lambda+\frac{n!}{2!(n-2)!}\eta^{n-2}\lambda^{2}+\ldots+\frac{n!}{n!(n-n)!}\eta^{n-n}\lambda^{n}\right]=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{n!}\left[\binom{n}{0}\eta^{n}+\binom{n}{1}\eta^{n-1}\lambda+\binom{n}{2}\eta^{n-2}\lambda^{2}+\ldots+\binom{n}{n}\eta^{n-n}\lambda^{n}\right]=$$

$$=\frac{e^{-(\lambda+\eta)}}{n!}(\eta+\lambda)^{n}$$

y por lo tanto Z = X + Y tiene una distribución de Poisson con parámetro $\eta + \lambda$.

b. Evidentemente, por el principio de inducción completa, lo recién demostrado puede ser ampliado al caso genérico.
Así, si las variables aleatorias <u>independientes</u> $X_1, ..., X_n$ tienen todas distribuciones de Poisson con parámetros $\lambda_1, ..., \lambda_n$ respectivamente, se tiene que la variable:

$$Z = X_1 + ... + X_n$$

tendrá una distribución de Poisson con parámetro:

$$\lambda_Z = \lambda_1 + ... + \lambda_n$$

A.BNP II

Se demostrará que:

$$F_{N(m;\sigma)}(\infty) = \lim_{x\to\infty} F_{N(m;\sigma)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Con este fin, como:

$$\left[F_{N(m;\sigma)}(\infty)\right]^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+v^2}{2}} dt\, dv$$

haciendo el cambio de variables:

$t = \rho\ Cos\ \alpha$ $\qquad$ $v = \rho\ Sen\ \alpha$

y como:

1º)

$$\begin{vmatrix} \frac{dt}{d\rho} & \frac{dt}{d\alpha} \\ \frac{dv}{d\rho} & \frac{dv}{d\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cos\alpha & -\rho Sen\alpha \\ Sen\alpha & \rho Cos\alpha \end{vmatrix} = \rho$$

2º) $\{(t,v)/(-\infty < t < \infty) \cap (-\infty < v < \infty)\} = \{(\rho,\alpha)/(0 \le \rho < \infty) \cap (0 \le \alpha < 2\pi)\}$

se obtiene

$$\left[F_{N(m;\sigma)}(\infty)\right]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho\ d\rho \underbrace{\int_{\alpha=0}^{2\pi} d\alpha}_{=2\pi} = \int_{\rho=0}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\frac{\rho^2}{2} = 1$$

y por lo tanto es:

$$F_{N(m;\sigma)}(\infty) = 1$$

Problemas sobre las distribuciones Binomial, de Poisson y Normal

BNP 1 Un señor que va y viene de su trabajo en automóvil tiene que pasar por un cierto semáforo 4 veces por día. Este semáforo da alternativamente luz verde y luz roja durante 40 y 60 segundos a la calle por la cual debe circular dicho señor. Indicar la probabilidad de que encuentre el semáforo en verde 0, 1, 2, 3 y 4 veces en un mismo día.

BNP 2 Una fábrica tiene una producción de tornillos cuyo porcentaje de defectuosos es desconocido. Se toma de una partida (que se supone muy grande) n tornillos, y si entre ellos hay k ó menos defectuosos, la partida se acepta. Calcular n y k tales que:

a) Si el porcentaje de defectuosos es inferior al 1%, se tenga una probabilidad no menor de 0,9 de aceptar la partida.
b) Si el porcentaje de defectuosos es superior al 2%, se tenga una probabilidad no menor de 0,9 de rechazar la partida.

BNP 3 Sea una producción de bombas de luz con un promedio del 1% de defectuosas. Sea un lote grande de dichas bombas. De dicho lote se saca una muestra de 100 bombas. Si hay 0 ó 1 defectuosas se acepta, rechazándolo si hay 3 ó más defectuosas. Si hay dos defectuosas se toma otra muestra de 100 bombas. Si en esta 2ª muestra hay 0 ó 1 defectuosas, el lote será aceptado, siendo rechazado en caso contrario. Indicar la probabilidad de aceptación del lote.

BNP 4 Suponiendo que el coeficiente de inteligencia del género humano tenga una distribución normal (100 ; 8), indicar la probabilidad de que un hombre tomado al azar tenga un coeficiente de 140 o más.

BNP 5 El contenido de bacterias de cierta conserva debe ser menor que 70 para que sea aceptable. Si la F. de D. del contenido de bacterias es normal (68 ; 0,9) indicar la proporción de latas que debe ser declarada no aceptable.

BNP 6 Si X es normal (1 ; 0,4), hallar:

a) $P(X < 0)$
b) $P(0,2 < X < 1,8)$.

BNP 7 Si la vida media de una colonia de bacterias es normal (600 ;60), indicar que porcentaje de bacterias durará entre 500 y 800 días.

BNP 8 Si en un cierto volumen de sangre de un hombre sano aparecen como media 20 glóbulos blancos, y la desviación típica entre muestras es igual a 2, indicar la probabilidad de que en una muestra de dicho volumen aparezcan 14 o menos glóbulos.

BNP 9 Supóngase que una cierta pieza es declarada buena si pasa por un cierto calibre de 5 mm de diámetro. Sea una producción de dichas piezas, cuyos diámetros tienen una distribución normal (4,8 ; 0,2). Indicar que porcentaje de esta producción será declarado bueno.

BNP 10 El volumen de producción de un cierto artículo es normal (m ; σ). Si un 60% de los días se produce menos de 150t, el 35% de los días se produce entre 150 y 160t, y en los mejores días se pasan las 160 t, hallar el valor medio y la varianza de la producción.

BNP 11 Si la variable X es normal (m ; σ), hallar un número k tal que:

$$P(m - k\sigma < X \le m + k\sigma) = 0{,}95$$

BNP 12 Se miden varios trozos sucesivos de meridiano, cuyas longitudes reales son α_1, α_2,..., α_k. Los valores medidos son variables aleatorias normales ($\alpha_1;\sigma_1$), ($\alpha_2;\sigma_2$), ..., ($\alpha_k;\sigma_k$) respectivamente. Indicar la probabilidad de que la suma total de los valores medidos tenga un error menor que 10^{-6}.

BNP 13 Una producción de ejes tiene un diámetro que sigue una distribución normal (50 ; 0,1). Se toma una muestra de 100 ejes. Indicar:

a) El valor medio y la varianza del promedio de los diámetros de la muestra.
b) Suponiendo que una partida sea rechazada si el promedio de sus diámetros es inferior a 49,999 o superior a 50,001, indicar la probabilidad de rechazo.

BNP 14 La vida de un transistor tiene una distribución normal (280hs ; σ). Indicar el valor máximo admisible de σ si se desea que el transistor tenga una probabilidad mínima de 0,8 de vivir entre 240 y 320 horas.

BNP 15 Un avión Airbus 310 tiene un peso permitido de despegue de 160 t. El peso vacío del avión es de 100 t. El peso del combustible, tripulación, víveres, etc., es de 40 t. El avión tiene una capacidad de 200 pasajeros. Según estudios, el peso medio de un pasajero con su equipaje es normal (90 ; 20). Indicar la probabilidad de que el avión trate de despegar con un peso mayor que el permitido. (Caso real).

BNP 16 La venta semanal de nafta (en toneladas) de una estación de servicio es normal (100 ; 10). Suponiendo que el camión de suministro viene una vez por semana, indicar la capacidad que debe tener la cisterna de la estación para tener una probabilidad de 0,999 de poder despachar a todos sus eventuales clientes.

BNP 17 La viga principal del ala de un avión comercial está calculada a la fatiga de manera tal que aguante 6×10^6 inversiones de momento flector. La cantidad de inversiones que dicha viga tiene que aguantar por hora de vuelo es normal (100 ; 20). Suponiendo que el avión vuele 200 horas mensuales, indicar la vida del avión en meses de manera tal de tener una probabilidad de 0,999 de no tener una rotura por fatiga.

BNP 18 En un partido de fútbol de 1ª división, la pérdida de peso en kg. de un delantero es normal (5 ; 1). Un jugador entra en conflicto con su club, y en el próximo partido pierde solo 3 kg. Indicar la probabilidad de que esto ocurra, en la hipótesis de que dicho jugador no haya "ido a menos".

BNP 19 Sea un pico de caudal constante de 1 litro/seg usado en una planta embotelladora. Sea T la variable aleatoria correspondiente al tiempo que una botella está debajo del pico. Supóngase que T sea normal (m ; 0,01), siendo m el valor de ajuste de un dispositivo que hace circular las botellas. Supóngase que las botellas sean de un litro.

a) Indicar que valor de ajuste ha de tomarse para tener una probabilidad de 0,999 de que el líquido no rebalse.
b) Tomando el valor de ajuste recién hallado, indicar la probabilidad de que una botella tomada al azar tenga menos de 950 cc.

BNP 20 El peso de las unidades de una cierta manufactura es normal (120 ; 8). Las unidades se empaquetan de a 24 en cajas de cartón cuyo peso es de 300 gr. (peso constante). En la inspección final se pesan las cajas, y se rechaza toda caja cuyo peso total sea inferior a 3.120 gr. Indicar:

a) La probabilidad de que no se detecte cuando por error se empaqueten 23 unidades en vez de 24.
b) De que sea rechazada una caja con 24 unidades.

BNP 21 La estatura de los hombres de Buenos Aires es normal (172 ; 12). Se eligen 3 hombres al azar y se los mide. Hallar la F. de D. de la variable aleatoria correspondiente al más bajo de los medidos (o, en caso de que haya empate, la F. de D. de la variable de los 2 ó 3 más bajos).

BNP 22 Sea una cosecha de granos cuyo diámetro sea normal (3 ; 0,1). Esta cosecha se pasa por un tamiz cuyos agujeros son de $\phi = 2$. Lo que NO pasa es metido en un silo. Indicar la F. de D. del diámetro de los granos contenidos en el silo.

BNP 23 Sea una presa de derivación (no hay almacenamiento de agua) construida en una corriente cuyo caudal en m^3/seg es normal (10 ; 1), y de la cual se saca toda el agua para ser usada en riego, hasta un máximo de 12 m^3/seg. Indicar la F. de D. del caudal que fluye por el vertedero (exceso del agua que llega sobre el consumo).

BNP 24 La resistencia al avance de un avión es proporcional al cubo de su velocidad ($k.v^3$). Sabiendo que es normal (750 ; 10) la variable aleatoria correspondiente a la velocidad de crucero del avión, se pide hallar la F. de D. de la variable que da la resistencia al avance.

BNP 25 Una trituradora de piedra es tal que si D es la variable aleatoria correspondiente a los diámetros de las partículas resultantes, se tiene que lg_e D es aproximadamente normal (m ; σ). Hallar la F. de D. de D.

BNP 26 Indicar un α tal que en 60000 tiros de dado se tenga que:

$$P\left(\left|\begin{matrix} \textit{Cantidad de} \\ \textit{ases} \\ \textit{obtenidos}\end{matrix} - \begin{matrix}\textit{Valor medio de la} \\ \textit{cantidad de ases a} \\ \textit{obtener en el } \exp.\end{matrix}\right| < \alpha\right) = 0{,}9$$

BNP 27 Si la probabilidad de sacar cara en un tiro de moneda es 1/2, ¿con qué cantidad de cantidad de pruebas se garantiza una probabilidad de 0,999 de que la frecuencia relativa de aparición de cara difiera de 1/2 en menos de 0,1?

BNP 28 Si un hombre juega 10000 partidos de pase inglés y apuesta \$1 por partido, indicar la probabilidad de que pierda menos de \$300 en los 10000 partidos. (La probabilidad de ganar en un único partido es 0,492).

BNP 29 En una cierta ciudad grande, como promedio mueren 2 personas por día electrocutadas. Indicar la probabilidad de que mañana mueran 3.

BNP 30 Una compañía de seguros sabe que el 0,0005 de la población muere anualmente en un cierto tipo de accidente que paga seguro doble. Si la compañía tiene 10000 asegurados, indicar la probabilidad de que tenga que pagar más de 3 seguros de este tipo.

BNP 31 Una fábrica produce tornillos con un 1% de defectuosos. Un ferretero que compra partidas grandes saca de cada una de ellas una muestra de 100 y rechaza la partida si encuentra algún tornillo defectuoso. Indicar la probabilidad de rechazo que tienen esas partidas.

BNP 32 Una fábrica produce tornillos de una calidad buena, pero se desconoce cual es el porcentaje real de defectuosos. Se toma de cada partida una muestra de n tornillos, y la partida se rechaza si se encuentra algún defectuoso. Indicar el valor de n para que en el caso que el porcentaje de defectuosos suba de 1% se tenga una probabilidad mínima de rechazo igual a 0,90.

BNP 33 En una computadora fallan como promedio dos transistores por hora. Mientras menos de 7 transistores estén fallados la computadora sigue funcionando normalmente, parándose en caso contrario. Indicar la probabilidad de que la computadora pueda completar un cálculo que insume 3 horas.

BNP 34 Los errores de imprenta de una cierta editorial son de $2\frac{1}{2}$ por página. Si un cierto libro tiene 300 páginas, indicar la probabilidad de que en alguna de ellas haya 5 o más errores.

BNP 35 En una fábrica con un personal muy numeroso, la tasa media de accidentes es de 3 por semana. Se pide hallar la probabilidad de que haya 6 o más accidentes en un período de 2 semanas.

BNP 36 La tasa mensual de suicidios en una ciudad de 2.500.000 habitantes es de 1 en 1.000.000. Se pide hallar:

a) La probabilidad de que en un cierto mes se suiciden 6 o más personas.
b) El porcentaje de meses con 6 o más suicidios.

BNP 37 La sustancia radioactiva A presenta 1 fisión por mg y por segundo, y la sustancia radioactiva B presenta 1/2 fisiones por mg y por segundo. Indicar el valor medio y la varianza de la cantidad de fisiones de una mezcla de 3 mg de la sustancia A y 2 mg de la sustancia B.

BNP 38 En la playa de Vicente López, como promedio hay que auxiliar a un nadador por domingo de verano. Suponiendo que la playa esté abierta 10 horas y que la única lancha de salvataje tome media hora por operación, indicar la probabilidad de que no haya auxilio disponible cuando sea requerido.

BNP 39 Un bar de una estación de ferrocarril tiene una venta mensual de 25 botellas de una gaseosa poco común. Indicar cuántas botellas se deben tener al principio de cada mes para tener una probabilidad mayor de 0,75 de abastecer la demanda.

BNP 40 Una flota de camiones tiene una tasa de averías de 3 por día. El tiempo de reparación de un camión es de 1 día. Indicar cuantos mecánicos es necesario contratar para tener una probabilidad mayor que 0,95 de que un camión averiado sea atendido en el acto. Suponer que un camión que no pueda ser atendido en el acto sea derivado a otro taller.